Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa

Juan Antonio García Cruz y Antonio Martinón

Universidad de La Laguna

García Cruz, J.A. y Martinón, A. (1998). 'Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa'. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 16, pp.85-100.

Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa

Juan Antonio García Cruz y Antonio Martinón
Universidad de La Laguna

En este artículo presentamos algunas notas teóricas sobre la interacción en el aula así como de las normas sociales y sociomatemáticas que la regulan. Estas normas juegan un papel importante en la construcción significativa del conocimiento y permite avanzar desde el propio conocimiento mostrado por los alumnos de forma espontánea en una situación de resolución de problemas. Damos cuenta también de algunos hechos acaecidos durante una experiencia de aula sobre problemas de generalización lineal (pautas lineales) que fue desarrollada según las normas propias de la interacción.

In this paper we outline some theoretical ideas on classroom interaction, and also about socio and sociomathematical norms which regulate that interaction. These norms play an important role in students' significative knowledge construction, and allow students -when solving problems spontaneously- to develop their own knowledge from the previous one. We also give some examples from a classroom experience on linear generalizing problems which was conducted following the interaction's norms.

Introducción

La construcción significativa del conocimiento por parte de los alumnos es una de las ideas centrales de la reforma educativa que está en marcha, en nuestro país y en otros. Tal reforma supone, entre otras cosas, un cambio profundo de la visión que se tiene del alumno, al que no se le debe contemplar como un recipiente pasivo a llenar de conocimiento, sino como constructor activo del mismo. Siguiendo a Anthony (1996), este nuevo punto de vista se apoya en los tres siguientes principios acerca del aprendizaje:

1. El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento y no de mera retención y absorción del mismo.
2. El aprendizaje es dependiente del conocimiento previo del alumno, pues este utiliza el conocimiento que ya posee para construir nuevo conocimiento.
3. El alumno puede llegar a ser consciente de sus procesos cognitivos, así como desarrollar la capacidad de controlarlos y regularlos; tal autoconciencia influye de forma significativa en el aprendizaje.

El primer principio concede al alumno un papel de actor, y no de mero observador, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este principio implica revisar los papeles del profesor y del alumno en la clase.

El segundo principio llama la atención sobre la importancia del conocimiento previo del alumno, también del conocimiento imperfecto, el que aún no está bien construido. Todos los profesores tenemos ejemplos de uso inapropiado del conocimiento, de los errores con los algoritmos y destrezas básicas, de la mala interpretación de los símbolos matemáticos. Podemos contemplarlos como resultados defectuosos del aprendizaje, que nos obligan a retroceder para corregirlos, pero también podemos cambiar de enfoque, de forma que actuando sobre la situación y modificándola, se facilite la continuación del aprendizaje; a tal fin procede preguntarnos

¿cómo identificamos los errores cometidos por los alumnos?, ¿cómo podemos utilizar las expresiones inapropiadas del conocimiento para llegar a acuerdos y significados que posibiliten la continuidad en el aprendizaje?, ¿qué dificultades encuentran los alumnos ante las intervenciones del profesor?, ¿qué entienden cuando el profesor introduce una nueva notación o da un nuevo significado a notaciones ya conocidas?

El tercer principio nos lleva a la autonomía en la construcción del conocimiento por los alumnos. En una nueva situación, yo, como aprendiz, debo ser capaz de discernir lo importante de lo accesorio, de reflexionar sobre lo que se ha hecho, por qué se ha hecho así y no de otra forma, de entender por qué no se ha hecho como había pensado inicialmente, de comprender la relevancia que tiene una observación realizada por otro, de comunicar qué he hecho, por qué lo he hecho y en la forma en que lo presento. Todas estas habilidades metacognitivas son claves en el aprendizaje y deberían ser tenidas en cuenta como elementos propios de la instrucción. El desarrollo de tales capacidades debe formar parte de la instrucción y no considerarlas como algo que se da por hecho, que se espera a que con el tiempo el alumno las adquiera, no se sabe muy bien cómo.

Los anteriores principios establecen una nueva visión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se denomina *interacción*. Así, la enseñanza se convierte en los intentos de organizar un proceso interactivo y reflexivo, con el profesor empeñado continuamente en actividades diferenciadas y actualizadas con los estudiantes, y no solo en la transmisión, introducción o redescubrimiento de un conocimiento objetivamente codificado y dado de antemano. Por otro lado, el aprendizaje resulta ser el proceso personal de construcción significativa del conocimiento, para lo que se necesita participación activa, en vez de una simple recepción de normas y conocimiento objetivado (Bauersfeld, 1994).

En este artículo presentamos una experiencia de interacción con problemas de generalización lineal, realizada con alumnos de 15-16 años, así como los resultados de una encuesta exploratoria previa que se realizó con esos alumnos.

Normas sociales y normas sociomatemáticas

En el aula, como espacio en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, hay normas que regulan las relaciones entre los alumnos, entre éstos y el profesor, y entre todos ellos y la disciplina en estudio. Tales normas constituyen una microcultura de aula y son parte esencial del proceso educativo. Desde la perspectiva interaccionista, los profesores y alumnos deben involucrarse conjuntamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, así que las normas deben facilitar la participación de los alumnos en el proceso de interacción. Para ello, las normas deben ser objeto de negociación entre los actores, para que sean aceptadas por todos.

Existen *normas sociales*, independientes de la materia en estudio (historia, lengua, matemáticas...). He aquí algunas de ellas que deberían seguirse en la interacción (en matemáticas o en cualquier otra asignatura): los alumnos deben argumentar sus opiniones y criterios, y la forma como han llegado a ellos; cuando se está discutiendo una situación, los alumnos deben participar, procurando aportar enfoques y consideraciones diferentes de las ya expuestas; cuando un alumno expone sus criterios, opiniones, soluciones... debe dirigirse al conjunto de la clase y no sólo al profesor.

También existen normas propias de cada una de las disciplinas escolares. Así, las *normas sociomatemáticas* son las que rigen de modo específico la actividad matemática que desarrollan los estudiantes (Yackel y Cobb, 1996). Entre ellas se encuentran las que se refieren a decidir lo que constituye una explicación matemática aceptable, así como lo que puede entenderse por una solución matemática a un problema y por una solución diferente a una dada. Por ejemplo, una buena explicación matemática es aquella en la que los alumnos no se limitan a explicitar cómo realizan un cálculo concreto, sino que explican cómo llegaron a que había que realizar tal cálculo.

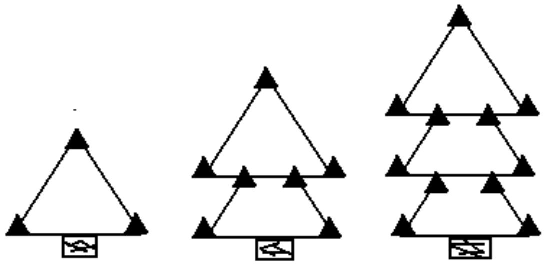
Las normas de la interacción suponen para el profesor un papel bien diferente al habitual. Seguirá siendo el representante de las matemáticas establecidas, pero debe ser algo más que el transmisor de esa cultura y evaluador del aprendizaje de los alumnos. Deberá luchar contra un obstáculo difícil de erradicar: los estudiantes buscarán en su autoridad la aprobación expresa de sus actos; la larga tradición de clases dirigidas por el profesor, en las que se presentan conceptos y convenciones matemáticas con escasa base concreta y familiar para los alumnos, ha creado en los mismos la disposición a intentar imaginar qué es lo que el profesor quiere que digan y hagan, en vez de construir significados de tal forma que los conceptos y convenciones cobren sentido personal. Además, el profesor deberá romper con la tradición de que sólo los argumentos de autoridad (porque es así, porque así ha sido siempre así, porque en el libro de texto viene así, porque yo soy el profesor) determinan cuando acaba una discusión; lo que es una solución matemática, lo que significa una solución matemática diferente o lo que constituye una explicación matemáticamente aceptable, deberá ser argumentado y discutido de forma significativa y relevante para los alumnos. Es decir, en la microcultura de la interacción no existe un criterio previo sobre qué debe entenderse por una solución matemática a un problema o lo que constituye una explicación matemática; por el contrario, tal significado deberá ser negociado entre los alumnos y el profesor.

Las normas de la interacción también afectan al papel tradicional de los alumnos. Un punto de partida es que el alumno sea capaz de generar sus propias y personales formas de resolver un problema; es decir, utilizar con confianza sus conocimientos matemáticos, en vez de esperar del profesor o de un compañero las instrucciones precisas, el procedimiento, para llegar a la solución. Una vez alcanzada una solución propia, no necesariamente precisa, el alumno debe estar en condiciones de comunicar sus hallazgos, lo cual le llevará a distinguir qué es lo que constituye una explicación o justificación aceptable, así como a elaborar la base de los significados que se comparten para la efectiva comunicación en el aula. Pero, además, deberá obligarse a sí mismo a dar sentido propio a las explicaciones aportadas por otros alumnos, así como a las críticas y argumentaciones que se produzcan contra la posición que ha mantenido durante la exposición. Explicar, justificar y argumentar los propios hallazgos, así como comprender, criticar y argumentar los hallazgos de otros, requiere que las propias explicaciones sean objeto de reflexión personal. Tales esfuerzos permiten el desarrollo de habilidades metacognitivas que son necesarias para un correcto desarrollo y progreso en el aprendizaje, pues cuando uno empieza a considerar lo adecuado de una explicación para los otros, y no sólo para uno mismo, la explicación se convierte en objeto explícito del propio discurso (Feldman, 1987, citado por Yackel y Cobb). Luego, un aspecto importante de la discusión, tanto como la misma solución, es también lo adecuado o no de la propia explicación, y tal conciencia requiere del desarrollo y ejercicio de la actividad metacognitiva que facilita la profunda comprensión, tanto de la solución como del proceso que a ella lleva.

Problemas de generalización lineal

Más adelante describimos una experiencia realizada en el marco de una investigación sobre la generalización en problemas de pautas lineales, llamados en la literatura didáctica *problemas de generalización lineal* (Lee y Wheeller, 1987, citado por Stacey). Ahora veremos ciertos aspectos de estos problemas. En la figura 1 se da uno de ellos.

En ellos, hay un texto relativo a una situación que se representa en unos dibujos ilustrativos. Se trata de una sucesión aritmética $f(n) = an + b$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, de diferencia *a* y primer término $a + b$, siendo *a* y *b* enteros, de modo que $f(n) > 0$, $a > 0$ y $b \neq 0$. Son conocidos los primeros términos de la sucesión, *f(1)*, *f(2)*,..., y se piden los valores de *f(n)* para ciertos *n*. Existen dos ámbitos bien diferenciados y que los alumnos, por lo general, distinguen: por un lado la sucesión numérica y por otro los objetos representados mediante los dibujos.



Un árbol de tamaño 1 necesita 3 luces.
Un árbol de tamaño 2 necesita 7 luces.
Un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces.

1. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 4?
2. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 5?
3. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 10?
4. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 20
5. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño n?
Explica cómo respondes a las cuestiones utilizando tus propias palabras.

(figura 1)

Resultados de otra investigación realizada en nuestro país por otros autores, sobre los mismos contenidos, han sido publicadas en esta misma revista (Castro Martínez y Rico Romero, 1994). Nuestras investigaciones previas sobre la resolución espontánea de esta clase de problemas, por alumnos de diferentes niveles de la educación secundaria (12-18 años), basadas en pruebas escritas y entrevistas semiestructuradas (García Cruz y Martinón, 1996a, 1996b, 1997), nos han permitido obtener las conclusiones que ahora exponemos.

Generalmente, los alumnos utilizan o el ámbito numérico o el ámbito gráfico para resolver cuestiones sencillas, de carácter introductorio o "de calentamiento", como es el cálculo de cuántos elementos tendrá un objeto de tamaño 5, 6, e incluso 10. Así, realizan un dibujo del tamaño requerido y proceden a contar sobre él, o extienden la sucesión hasta el término (tamaño del objeto) apropiado, no siendo tales estrategias de solución, obviamente, generalizables.

Tras las cuestiones introductorias se les plantea a los alumnos el cálculo de los elementos de un objeto de tamaño medio, como *¿cuántos elementos tiene un objeto de tamaño 20?* Se trata de una cuestión denominada por Stacey (1989) de *generalización lejana*, ante la cual resulta arduo utilizar una estrategia de recuento directo como las utilizadas en las cuestiones introductorias. Por lo general, ante las cuestiones de generalización lejana, una mayoría de alumnos utilizan estrategias de recuento indirecto tanto correctas como incorrectas. Estas últimas, casi siempre derivan del empleo de la regla de tres o de algún razonamiento de proporcionalidad directa.

Encuesta exploratoria.

Al grupo de alumnos con el que se iba a realizar la experiencia se le pasó una encuesta por escrito de carácter exploratorio consistente en el problema del árbol de Navidad (figura 1). El grupo estaba formado por los 17 alumnos de la asignatura Matemáticas A (poco formales), correspondiente al 4º nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (15-16 años), perteneciente a un Instituto de Educación Secundaria de una zona urbana de la isla de Tenerife.

Las soluciones dadas por los alumnos a la pregunta 4, *¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 20?,* pueden clasificarse del siguiente modo:

- 1 no respondió
- 5 extendieron la sucesión hasta el término 20
- 5 dieron soluciones correctas mediante recuentos indirectos
- 6 emplearon reglas de tres, o expresiones que suponen asimilar la situación dada a una de proporcionalidad directa (el árbol de tamaño 20 tiene el doble de luces que el de tamaño 10)

Las respuestas dadas a la pregunta 5, *¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño n?,* se agrupan tal como se indica a continuación:

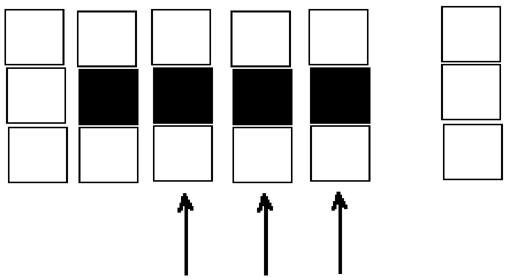
- 7 no respondieron
- 2 solicitaron el valor de n
- 1 respondió que hay que sumar 4 al término anterior, pero que necesitaba conocer éste
- 2 dijeron que utilizarían la regla de tres si supieran el valor de n; uno de ellos dio la solución $x = 19n/5$
- 4 dieron la expresión correcta $4n-1$

Una vez analizados los datos anteriores, se planificó la intervención en el aula según las ideas expuestas en las secciones anteriores. Es decir, intentaríamos abordar situaciones problemáticas de generalización lineal en un aula, conforme a las normas sociales y sociomatemáticas propias de la interacción. Concretamente, tal como ya se ha dicho, había que evitar que los alumnos buscaran la autoridad del profesor cuando dudaran de las soluciones y estrategias propias empleadas al resolver un problema. En este sentido, sus intervenciones no deberían dirigirse al profesor pidiendo implícitamente su aprobación o no. Por otro lado, los alumnos deberían modificar su habitual actitud pasiva. Nuestra intención, por el contrario, era que el papel del profesor fuera el de mediador entre el conocimiento de partida de los alumnos y el objetivo de *alcanzar una comprensión profunda de las pautas lineales*. Esta comprensión debería ser del tipo *relacional*, es decir, los alumnos deberían saber en cada problema *qué hacer y por qué* (Skemp, 1976). Para ello deberíamos, en primer lugar, dejar clara la norma social de que todo alumno tiene el deber de participar, aportando soluciones diferentes a las ya dadas y explicar su forma particular de resolver un problema. En segundo lugar, nos propusimos no dar ningún criterio previo sobre las normas sociomatemáticas relativas a qué es una solución diferente, qué es una explicación matemáticamente aceptable, qué es una estrategia generalizable, en qué consiste una estrategia correcta y qué es una estrategia diferente; pretendíamos que dichos términos y conceptos surgieran y se aclararan mediante la discusión en clase. Por último, deberíamos facilitar la comunicación promoviendo la intervención de la mayoría de los alumnos.

Desarrollo de las sesiones de aula

La experiencia fue realizada por el primero de los autores, durante tres sesiones de cuarenta y cinco minutos. Por motivos de espacio no daremos cuenta exhaustiva de la misma, sino que elegiremos algunos de los episodios que hemos estimado más relevantes.

La primera situación propuesta fue la de las *baldosas cuadradas* (figura 2). Tanto esta como la siguiente situación se han adaptado de Swan (1984). Formulamos la hipótesis previa de que el dibujo es un medio que proporciona seguridad a los alumnos para construir la generalización.



(figura 2)

La pregunta inicial fue *"¿cuántas baldosas cuadradas blancas serán necesarias para rodear 10 baldosas negras alineadas?"* Después de algunos minutos de trabajo en parejas, hay soluciones y pocos alumnos están dispuestos a explicarlas a toda la clase. Mediante una inspección rápida se detectan estrategias de solución correctas y otras incorrectas, generalizables y no generalizables.

Para facilitar y promover la discusión se elige para la primera intervención a Yisel, alumna que ha usado una estrategia no generalizable:

Yisel: *sumando siempre dos, obtenemos 26 baldosas blancas*

Esta alumna utilizó la misma estrategia en todas las cuestiones numéricas del árbol de Navidad.

Se pregunta entonces si alguien tiene una *estrategia diferente*. Varios alumnos solicitan intervenir. Para animar la discusión, interviene un alumno cuya estrategia no es correcta.

Pedro: *Si 5 baldosas negras necesitan 16 baldosas blancas, 10 negras necesitan 32 blancas.*

Profesor: *¿Cómo es que el resultado es diferente?*

Varios alumnos: *¡Está mal!*

Profesor, dirigiéndose a Beatriz: *¿Qué está mal?*

Beatriz: *¡El resultado!*

Profesor:*¿Puedes explicar donde está el error?*

Beatriz: *No lo sé, pero no da lo mismo que la primera...*

Profesor: *¿Cómo sabes que la primera es correcta?*

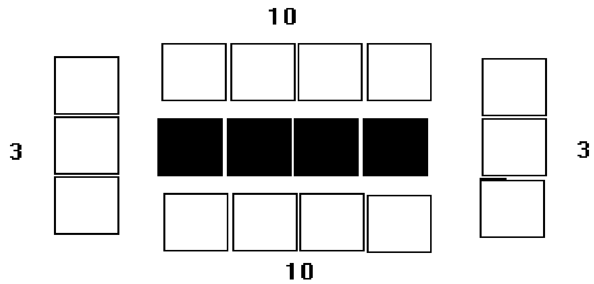
Beatriz: ...(dudando) *porque el dibujo dice que hay que sumar siempre dos...*

Con estas dos intervenciones se pretendía sentar la base de la discusión, no sólo hay que criticar una solución sino que hay que aportar un argumento convincente. En este caso Beatriz ha optado por señalar la ley de formación dada por el dibujo como hecho concluyente. Así, la primera estrategia se adapta a la ley de formación y es por lo tanto correcta. La segunda no es correcta pues el resultado final no corresponde con la primera. Señalemos de paso que, obviamente, no se ha explicitado por qué falla la segunda estrategia.

Profesor: *¿Tiene alguien otra solución diferente?*

Julio: *Para 1 baldosa negra necesito 8 baldosas blancas, y por cada baldosa negra necesito dos baldosas blancas más. Para 10 baldosas negras tengo 8 + 9×2 = 26 baldosas blancas.*

Samuel: *Yo tengo otra diferente.*
Profesor: *Explícala.*
Samuel: (Sobre el dibujo de la figura 3) *Hay tres baldosas blancas al principio y al final. Por encima y por debajo hay el mismo número de baldosas blancas que negras. Luego 3+3+10+10=26.*

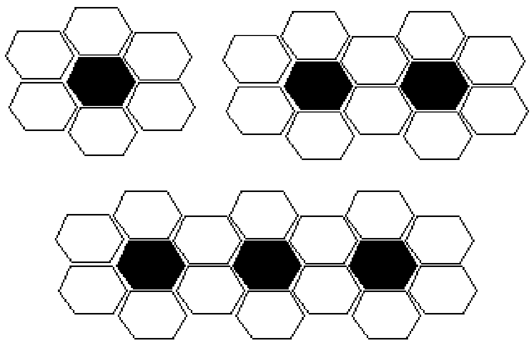


(figura 3)

Ambas explicaciones se produjeron en la pizarra de forma muy rápida pues, ambos parecen tener prisa en volver a sus asientos. Para Julio y Samuel está claro que sus respectivas soluciones son correctas. En el caso de Samuel, su expresión para el cálculo deriva de acciones de descomponer el dibujo en partes y contar los elementos de cada parte para hallar el total. Julio no ha explicado cómo ha obtenido su expresión. Otros alumnos requirieron de Julio y Samuel que explicaran, de nuevo, sus estrategias pues no las habían entendido plenamente. La explicación se produce, en ambos casos, repitiendo lo anterior, aunque en este caso han sido un poco más claras. Por ejemplo, Julio cuya explicación se había limitado a consignar la expresión para el cálculo, aclara cómo ha derivado tal expresión, y para tal fin utiliza la figura 2. En su nueva intervención aclara como contempla la construcción del objeto de tamaño 4 a partir del de tamaño 1, separando la columna de tres baldosas blancas de la derecha e introduciendo tres columnas adicionales de baldosas donde la baldosa central es negra (señaladas con flechas en la figura 2). Por fin parece que Julio entiende que la explicación que se le pide debe referirse a cómo ha obtenido su regla para el cálculo y no sólo a consignar la expresión aritmética del mismo. Algunos alumnos miran al profesor solicitando la aprobación de las dos estrategias expuestas, pues no parece muy usual que un problema se pueda resolver de dos formas distintas. Otros parecen dar por buenas las estrategias, pues el resultado es coincidente con el cálculo realizado sumando repetidamente dos, y esta estrategia ha sido aceptada por toda la clase.

Para Julio y Samuel la reflexión sobre las acciones realizadas sobre el dibujo ha tenido como efecto una generalización de la regla de cálculo particular. Los otros alumnos tendrán que pasar por el mismo proceso para poder comprobar la validez de las estrategias explicitadas. El profesor propone abandonar por un momento la situación y abordar otro problema del mismo tipo, ya que observa que algunos alumnos que parecen dudar de las explicaciones dadas por los demás siguen sin entender dónde está el fallo en sus estrategias y muestran una cierta obcecación en las mismas. Son alumnos que aplican el razonamiento directamente proporcional a este tipo de situaciones.

Profesor: (ver figura 4) *Propongo esta otra tarea: “Baldosas hexagonales”. Hay que calcular cuántas baldosas blancas son necesarias para rodear 10 negras, como indica el dibujo, pero también cuántas harían falta para rodear 45 negras*.



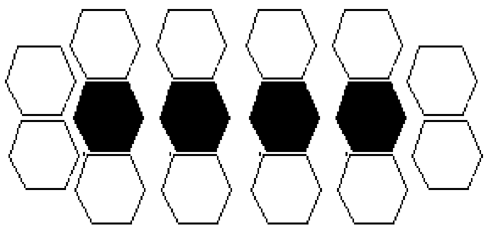
(figura 4)

Yisel proporciona una respuesta acorde con las soluciones que había dado a otras cuestiones:

> Yisel: *He sumado 4 siempre. Para 10 baldosas negras necesito 42 blancas y para 45 negras necesito 182 blancas.*

Debe aclararse que Yisel escribió una suma detallada, formada por el 6, como primer sumando, y ¡cuarenta y cuatro sumandos iguales a 4! Desde luego, lo que parece arduo para el profesor, a veces es lo sencillo y obvio para el alumno. Yisel, por lo tanto, sigue manteniéndose en una estrategia rutinaria, parece incapaz de dar el salto de un recuento directo a otro indirecto. Con su intervención se pretendía que avanzara desde el propio conocimiento, sin imponer otro punto de vista.

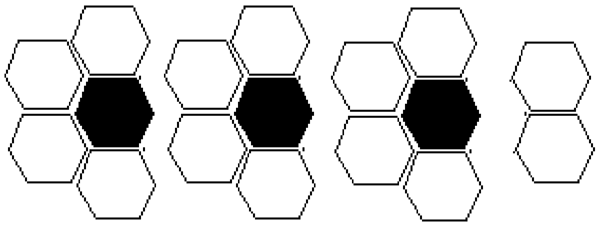
Aranza afirma haber empleado la estrategia que Samuel desarrolló en el problema anterior y sale a la pizarra a explicar su solución. Al realizar el dibujo coloca los hexágonos alineados, reproduciendo la misma disposición que tenían los cuadrados, pero ahora con los hexágonos (ver figura 5).



(figura 5)

Aranza, al intentar reproducir la estrategia de Samuel sobre la nueva situación, modifica el dibujo para que se parezca al del problema de las *baldosas cuadradas*. Su comprensión de la estrategia de Samuel está fuertemente asociada al dibujo de la situación anterior, es la disposición particular de las piezas y no las acciones de descomposición y recomposición la base para su comprensión de la estrategia. Hay un cierto revuelo en la clase, pero se permite que Aranza termine su explicación para el cálculo de 10 baldosas, obteniendo el resultado de 24. Debido al ambiente de murmullo generado por su intervención, y al comparar su resultado y el de Yisel, concluye que su estrategia no es correcta, pero no sabe explicar por qué. Hay intervenciones, esperadas, por parte de algunos alumnos: *¡Ese dibujo no está bien!* . Otros alumnos señalan que en el dibujo de Aranza faltan hexágonos blancos.

A continuación interviene otra alumna, Ana. Para su explicación utiliza un dibujo realizado sobre cuatro baldosas hexagonales:



(figura 6)

La estrategia de Ana consiste en agrupar de cuatro en cuatro (diferencia constante) las baldosas blancas. Al final sobran 2 baldosas. Luego la expresión de cálculo para cuatro baldosas negras es 4×4 + 2. Para 10 baldosas negras será por tanto 4×10 + 2, y para 45 baldosas negras será 4×45 + 2.

No se encontraron otras soluciones diferentes, pues los alumnos, por lo general, habían aplicado la estrategia desarrollada por Julio en el anterior problema.

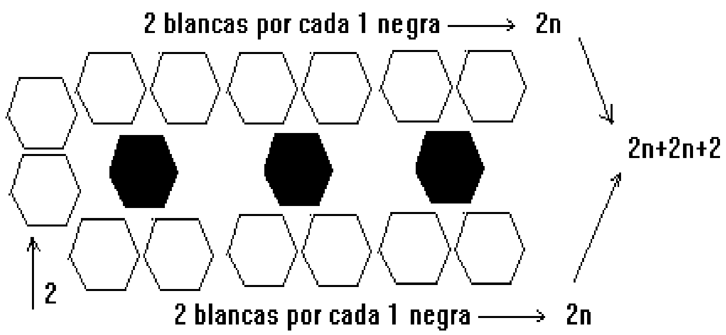
Las estrategias desarrolladas son claramente visuales y consisten en acciones introducidas sobre el dibujo. El reflejo de tales acciones conduce al establecimiento de un invariante para la regla de cálculo (García Cruz y Martinón, 1997).

Se distinguen las diferentes estrategias de los alumnos por la acción que cada uno de ellos ejecuta sobre el dibujo y por el invariante establecido. El comportamiento de Samuel muestra que es capaz de pasar de una a otra estrategia modificando las acciones sobre el dibujo y, aunque comprende la estrategia de Julio, no la aplica, pues para él está claro que debe contribuir a la discusión en clase con una estrategia diferente. Julio se muestra muy satisfecho de su estrategia. En la prueba inicial había utilizado una estrategia incorrecta, basada en un razonamiento directamente proporcional. Su confianza en la nueva y correcta estrategia se ve reforzada por dos hechos: ha funcionado en otra situación y además ha tenido mucho éxito entre los otros alumnos, pues ha sido imitada; no ve la necesidad de aportar ninguna nueva. Por último, Ana, que en la prueba inicial había utilizado la estrategia de sumar iteradamente la diferencia constante, después de la primera sesión y del trabajo propuesto para la segunda, ha sido capaz de elaborar una estrategia propia, diferente y generalizable.

Un hecho importante debe ser señalado. La aceptación de la estrategia de Julio por una gran mayoría de alumnos da un valor social a tal estrategia. Es evidentemente correcta, pues sus cálculos particulares coinciden con los derivados de una estrategia rutinaria, como es sumar iteradamente la diferencia constante, y muy arraigada como medio de comprobación en los alumnos, aunque algunos no capten su validez por medio de una comprensión profunda de la misma. Esta comprensión, como ya hemos señalado, se adquiere mediante una actividad reflexiva realizada de forma individual por cada alumno sobre el dibujo. El uso del dibujo, como medio para abstraer y generalizar la regla de cálculo, confirma nuestra hipótesis inicial. Las acciones realizadas sobre los elementos particulares del cada dibujo llevan a los alumnos a establecer ciertas relaciones conectivas entre estos, relaciones que se transforman en expresiones de cálculo, donde intervienen las operaciones de sumar y de multiplicar y que constituyen lo que denominamos invariantes. Invariantes en el sentido en que los alumnos, que han pasado por este proceso cognitivo, establecen una generalización de la regla de cálculo a partir de aplicar dicho invariante a otros cálculos concretos. Es la estructura general del invariante, y no los elementos numéricos concretos, lo que da el carácter genérico a la regla de cálculo. Así pues, en primer lugar, se tiene una generalización *intensional*, abstracción de la estructura general de la regla de cálculo, que se compone de elementos variables y elementos constantes, y, en segundo lugar, una generalización *extensional* por ampliación del rango de los elementos variables (Dörfler, 1991).

Para una mejor comprensión de las estrategias expuestas, se les pidió a los alumnos que resolvieran otras cuestiones planteadas en los dos problemas, mediante las estrategias que no habían empleado. Además, se les pidió que su resolución no se limitara a un mero cálculo, sino que deberían explicar las estrategias empleadas con sus propias palabras y que en ellas, podían utilizar referencias al dibujo que acompaña a cada situación. Consideramos esta parte de la tarea como de vital importancia, pues por un lado, fuerza a los alumnos a interpretar más de una estrategia y por otro lado prepara el camino hacia la simbolización de cada una de las estrategias empleadas.

La tercera sesión se dedicó a introducir símbolos para las estrategias particulares. La introducción de símbolos es clave en el proceso de generalización pues ayuda a descontextualizar los cálculos particulares y a que las expresiones correspondientes sean objeto de reflexión por sí mismas. Siguiendo un esquema de traducción entre símbolos y elementos concretos, se simbolizaron las correspondientes estrategias. Para esta parte se contó con los alumnos que eran capaces de simbolizar, pues habían dado tales respuestas en la prueba inicial. La estrategia de Samuel, fue simbolizada para cada caso particular, pues es claramente dependiente del dibujo.



(figura 7)

Una vez simbolizadas las estrategias se simplificaron las correspondientes expresiones, resaltándose el hecho de que las expresiones simbólicas resultantes son idénticas a las obtenidas mediante la estrategia de Ana. Así, una simbolización como es 2n + 2n + 2, que se obtiene de aplicar una acción de descomposición del dibujo en tres partes, dos variables y una constante, una vez simplificada y obtenido 4n + 2, permite observar el dibujo mediante otra acción diferente, que consiste en el agrupamiento de cuatro en cuatro de las baldosas hexagonales blancas, quedando un resto de dos baldosas (ver figura 7). Esta última actividad es importante en el proceso de dar significado a las expresiones simbólicas en relación con las acciones particulares desarrolladas sobre el dibujo, pues para aquellos alumnos que tienen dificultad en dar el salto desde una expresión concreta a una simbólica este tipo de actividad sirve para facilitar tal tránsito.

La cuarta sesión se dedicó a plantear y resolver problemas del mismo tipo, a presentar diferentes estrategias, a dar las correspondientes interpretaciones con referencia al dibujo, a simbolizar las mismas y a simplificarlas, dando a la expresión simplificada una interpretación con referencia concreta a acciones de descomposición del dibujo.

Conclusiones

Hemos querido presentar de la forma más vívida posible el relato de los episodios relevantes de la experiencia, con el ánimo de quién lo desee lo pueda ensayar. Aunque como afirma Freudenthal (1991, 160-161), en las ciencias sociales, y la educación es una de ellas, replicar un experimento solo es posible excepcionalmente, en contraste con lo que ocurre con otras ciencias, como la física. Sin embargo, algunas ideas pueden servir como guía general.

El profesor debe tener idea previa, aunque no siempre podrá tenerla completa, de las posibles soluciones que los alumnos darán a la tarea. En la presentación de las soluciones en clase, obviamente, se debe empezar por las incorrectas o no generalizables, pues son las que mejor facilitan la discusión. Luego se pedirán diferentes correctas y se deberá usar el tiempo necesario de tal forma que los alumnos las presenten con todo detalle y no sólo como un relato lineal de los procedimientos de cálculo. Esta parte, como ya señalamos, es importantísima, pues la propia explicación se convierte en objeto del discurso del alumno y facilita la comprensión profunda de las estrategias desarrolladas.

No basta con una única situación o problema, y habrá que repetir el mismo proceso, dependiendo del tema y de los alumnos, un cierto número de veces. El tiempo empleado en desarrollar el hábito de pensar y reflexionar sobre los propios actos y los de los otros siempre proporciona recompensa.

Referencias

Anthony, G.: 1996. ‘Active Learning in a Constructivist Framework’. *Educational Studies in Mathematics*, **31**, 349-369.

Bauersfeld, H.: 1994. ‘Perspectives on Classroom Interaction’, en R.Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (editores) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, 117-146.

Castro Martinez, E. y Rico Romero, L.: 1994. ‘Visualización de secuencias numéricas’. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* **1**.

Dörfler, W.: 1991. ‘Forms and means of generalization in mathematics’, en A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.

Feldman, C.F.: 1987. Thought from lenguage: The linguistic construction of cognitive representations. En J.Bruner y H.Haste (Eds), *Making sense: The child’s construction of the world*. Methuen. London.

Freudenthal, H.: 1991. *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1996a. ‘Modelos y estrategias en problemas de generalización lineal’ en J. A. Dorta *et all* (eds), *25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna*, Universidad de La Laguna, 297-307.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1996b. ‘Personal strategies of generalization in linear generalizing problems’ en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* University of Valencia, Vol. 1, p.174.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1997. 'Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems', en E. Pehkonen (editor) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Univerity of Helsinki, Vol. 2, 289-296.

Lee, L. y Wheeler, D.: 1987. *Algebraic Thinking in High School Students: Their Conceptions of Generalization and Justification*, Concordia University, Montreal.

Skemp, R.R.: 1976. 'Relational understanding and instrumental understanding'. *Mathematics Teaching*, **77**, pp 20-26.

Stacey, K.: 1989. 'Finding and using patterns in linear generalising problems', *Educational Studies in Mathematics*, **20**, 147-164.

Swan, M. (Editor).: (1984). *Problems with Patterns and Numbers*. Join Matriculation Boards. Shell Centre for Mathematics Education. Nottingham. [Existe versión en castellano: *Problemas con pautas y números*. Servicio Editorial del País Vasco. Bilbao]

Yackel, E. y Cobb, P.: 1996, 'Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics', *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**, 458-477.