

## **Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P. A. U.**

*Israel García Alonso* (I.E.S. Barranco de las Lajas)

y *Juan Antonio García Cruz* (Universidad de La Laguna)

Presentamos en este trabajo un avance, de un estudio que realizamos, sobre la actuación del alumnado al abordar cuestiones de inferencia estadística. Nuestro objetivo es caracterizar esa actuación y hemos comenzado por analizar las respuestas dadas por el alumnado a las cuestiones de inferencia estadística en la convocatoria de junio de 2002 de la Prueba de Acceso a la Universidad (Distrito único de Canarias correspondiente al tribunal constituido en la Universidad de La Laguna).

Las cuestiones relativas a inferencia estadística corresponden al examen de matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Este examen consta de dos opciones de cinco preguntas cada una denominada Prueba-A y Prueba-B. El alumnado debe elegir un tipo de prueba y, dentro de la prueba elegida, elegir cuatro de las cinco preguntas de que consta. De 914 alumnos, presentados en el tribunal constituido en la Universidad de La Laguna, que tenían que examinarse de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en la convocatoria de junio de 2002, 221 alumnos han escogido la Prueba-A, lo que representa un 24.17%. La Prueba-B fue elegida por 693 alumnos, lo que representan el 75.83%. Podríamos decir resumiendo que de cada cuatro alumnos tres eligen B y uno elige A. No disponemos de datos fiables que expliquen la mayor tendencia hacia la Prueba-B. Apuntamos como posible explicación de la preferencia de la Prueba-B frente a la Prueba-A mostrada por el alumnado la mayor presencia de cuestiones sobre estadística y probabilidad en la Prueba-B frente a la igualdad con el análisis en la Prueba-A.

Los resultados que presentamos corresponden a una muestra de 50 alumnos que han elegido la Prueba-B. En la Prueba-B las cuestiones de inferencia estadística son la segunda y tercera.

En la segunda cuestión, en el apartado (a), se solicita un intervalo de confianza con nivel 0.95 para un porcentaje. En el apartado (b) se pide el tamaño de la muestra para un error máximo dado *si se usa un nivel de significación del 1%* (sic).

La tercera cuestión plantea un test de hipótesis para la media de una población. En el apartado (a) se solicita para un nivel de significación de 0.05 y en el apartado (b) *si el nivel de confianza es del 99%* (sic). La solución correcta pasa por aceptar la afirmación del equipo directivo en el apartado (a) y rechazarla en el apartado (b).

Los contenidos básicos de inferencia corresponden con test de hipótesis e intervalos de confianza, para media o proporción de una población. Ambos contenidos se cubren en las dos pruebas de forma asimétrica. Si en una se pide test de hipótesis para la media de una población en la otra se plantea el test de hipótesis para una proporción. Igual ocurre con el intervalo de confianza. Además hemos señalado la presencia conjunta de confianza y significación en las cuestiones relativas a un mismo tipo de problema. Lo que nos parece una clara falta de rigor, que por espacio no podemos tratar adecuadamente, pero que no podemos pasar por alto.

## Test de hipótesis

Empezamos con los resultados relativos al test de hipótesis cuestión tercera.

Prueba-B. Cuestión 3: *El equipo directivo afirma que la media del recorrido que hacen los alumnos que asisten a un centro de bachillerato es, a lo sumo, igual a dos kilómetros y medio con una desviación típica igual a 0.5 km. Se toma una muestra de 81 alumnos y se obtiene para ellos un recorrido medio de 2.6 km.*

(a) *¿Se puede aceptar con un nivel de significación igual a 0.05 la afirmación del equipo directivo?*

(b) *¿La respuesta al apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 99%?*

Veamos la actuación del alumnado estructurada en tres pasos: planteamiento del contraste (Planteamiento)<sup>1</sup>, cálculo de un valor crítico sin especificar una región de aceptación-rechazo o determinación de una región de aceptación-rechazo (Cálculos), y qué resuelven respecto de la afirmación del equipo directivo (Resolución). Esta estructura se corresponde con la empleada para calificar la cuestión por el profesorado corrector.

La solución correcta la estructuramos a continuación según los pasos indicados.

*Planteamiento:* formular un contraste unilateral ( $H_0: \mu_0 \leq 2.5$ ;  $H_a: \mu_0 > 2.5$ ) derivado de la afirmación del equipo directivo sobre que la media del recorrido es a lo sumo 2.5 km.

*Cálculos:* determinar, por ejemplo, la región de aceptación para un nivel de significación del 0.05, dada mediante el intervalo:

$$\left(-\infty, \mu + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, 2.5 + 1.645 \frac{0.5}{\sqrt{81}}\right) = (-\infty, 2.5913)$$

*Resolución:* utilizamos el valor de la media muestral 2.6 para decidir que rechazamos la hipótesis nula, al no caer en el intervalo, para este nivel de significación. La respuesta para el apartado (b) es de aceptación de la hipótesis al ser  $(-\infty, 2.629)$ .

Hemos cruzado además los datos del alumnado relativos a los tres diferentes pasos, lo que nos permite arrojar cierta luz sobre la actuación global de los mismos en la cuestión y entre pasos de la misma.

Esta cuestión es abordada por 44 alumnos (88%) y la resuelven correctamente sólo 8 (18%-16%)<sup>2</sup>.

Detallemos el análisis según los tres pasos señalados anteriormente.

### 1) Planteamiento

24 alumnos (55%-48%) plantean un contraste unilateral para la media. De los que 23 asignan un valor correcto al parámetro en la hipótesis nula ( $\mu_0 \leq 2.5$ ) mientras que un alumno utiliza un valor entero ( $\mu_0 \leq 2$ ).

Por otro lado, 12 alumnos (27%-24%), plantean un contraste bilateral. De estos, 9 alumnos utilizan 2.5 como valor de la hipótesis nula, 2 asignan el valor 2.6 a la

<sup>1</sup> Entre paréntesis la denominación abreviada de cada paso.

<sup>2</sup> El primer porcentaje es sobre los 44 alumnos que eligen la cuestión. El segundo es sobre el total, 50 alumnos, que eligen la Prueba-B.

hipótesis nula y un alumnos utiliza el tamaño de la muestra, 81, como valor de la hipótesis nula.

Finalmente 8 alumnos (18%-16%) se saltan este paso y abordar el resto del problema sin formular la hipótesis nula.

## 2) Cálculos

Los alumnos optan en este segundo paso por una de las tres opciones siguientes: calculan el valor (crítico) sin especificar claramente una región de aceptación-rechazo, determinan la región de rechazo o determinan la región de aceptación.

Mayoritariamente, 38 alumnos, construyen una región o intervalo de aceptación de la hipótesis nula (86%- 76%).

En detalle tenemos las siguientes frecuencias: Hay 1 alumno que calcula sólo un valor crítico y no explicita ni región de aceptación ni de rechazo. 5 alumnos construyen una región de rechazo. Por último 38 alumnos construyen una región de aceptación. Entre estos, 21 construyen un intervalo para un planteamiento bilateral y 17 un intervalo para un planteamiento unilateral.

Al cruzar estos datos con los del paso 1) observamos las siguientes incoherencias: Hay 7 alumnos que parten de un planteamiento unilateral y al llegar a este paso determinan una región de aceptación bilateral. Por otro lado 3 alumnos lo hacen al revés, es decir, parten de un planteamiento bilateral y resuelven el problema determinando una región de aceptación o rechazo unilateral.

25 alumnos son coherentes en los cálculos con el planteamiento. Es decir, la región que construyen se corresponde con el planteamiento. Si planteamiento bilateral entonces región bilateral (9 alumnos) y si planteamiento unilateral entonces región unilateral (16 alumnos).

Hay tres alumnos que al construir la región de aceptación se refieren a la misma como intervalo de confianza ( $Ic$ ). En dos casos no se ha planteado el contraste y en otro se ha planteado un contraste bilateral utilizando como valor del parámetro el tamaño de la muestra ( $\mu=81$ ). A continuación reproducimos la ejecución del problema por este alumno, todo un ejemplo de errores sistemáticos y abreviaciones innecesarias:

$$H_0: \mu=81$$

$$H_1: \mu \neq 81$$

$$N(2'5, 0'5), n=81, \bar{x}=2'6$$

$Ic (2'5 \pm 1'645 \cdot 0'5 / \sqrt{81}) \quad Ic (2'5 \pm 0'09) \quad Ic (2'41, 2'59) \quad Se rechaza la  $H_0$  y se acepta  $H_1$  por  $0'01$$

Sin comentarios en la formulación de la hipótesis nula. Al expresar la distribución Normal para el contraste se olvida del correcto valor de la desviación típica, que sin embargo si utiliza adecuadamente para la construcción del intervalo. A continuación, anota el tamaño de la muestra y la media muestral. En este momento, no cae en la cuenta del error cometido al formular las hipótesis. Luego construye de forma abreviada un intervalo de confianza (¿no centrado en la media muestral?) con un valor  $z_{\alpha/2}$  incorrecto. Sin embargo, al final ha utilizado la media muestral como elemento para el contraste, tal y como se desprende de la conclusión (¡CORRECTA!) *rechazar la  $H_0$  por  $0'01$ .*

### 3) Resolución

En este último paso del problema hemos clasificado a los alumnos en dos grupos. Por un lado están los que resuelven el contraste articulando una respuesta coherente, aunque no pueda considerarse que han resuelto bien la cuestión. Un ejemplo de esto último es un alumno que formula un planteamiento bilateral, determina una región de aceptación bilateral y concluye en la dirección adecuada a los cálculos realizados. Por otro lado, están los alumnos cuya respuesta no se puede considerar coherente con la ejecución de los pasos anteriores. Ya sea por contener errores o por carecer de sentido. Como ejemplo tenemos el caso de un alumno que no formula claramente la hipótesis, construye un intervalo (que denomina de confianza  $I_c$ ) centrado en la media muestral y utiliza esa misma media muestral, que obviamente pertenece al intervalo, para concluir que *Si, se puede aceptar con un  $N_s$  del 0'05 la afirmación del equipo, ya que el valor (2'6) se encuentra dentro del  $I_c$  por lo tanto se acepta  $H_0$  y se rechazaría  $H_1$* . Hipótesis que no ha formulado en ningún momento.

Como hemos señalado anteriormente el problema se resuelve correctamente mediante el planteamiento de un contraste unilateral.

21 alumnos dan una respuesta coherente (48%-42%), de estos tenemos que:

8 alumnos han planteado un contraste unilateral, con  $\mu_0 \leq 2.5$ , y han calculado una región de aceptación unilateral (18%-16%), concluyendo que deben rechazar la afirmación del equipo directivo.

6 alumnos se saltan el primer paso, no formulan de forma explícita la hipótesis nula, y calculan un estadístico (2 casos) o la región de aceptación (4 casos) para resolver un contraste bilateral concluyendo que deben rechazar la afirmación del equipo directivo.

6 alumnos formulan un contraste bilateral. De estos 4 determinan una región bilateral de aceptación. Un alumno más caería dentro de esta categoría salvo que ha utilizado como valor del parámetro en la hipótesis nula el valor 2.6. Tenemos otro alumno que utiliza el dato experimental, 2.6, como valor del parámetro para determinar una región de rechazo unilateral.

Por último tenemos 1 alumno que formula un contraste unilateral y determina una región de aceptación bilateral.

4 alumnos que completan adecuadamente los dos primeros pasos, planteamiento y cálculo, concluyen en el sentido contrario al que deberían hacerlo.

Como ejemplo valga el siguiente: Después de plantear correctamente la hipótesis nula  $H_0 \rightarrow \mu \leq 2.5$  y calcular los intervalos  $(-\infty, 2'591)$  y  $(-\infty, 2'629)$  para los apartados a) y b) respectivamente concluye *Con un nivel de significación de 0'05, se acepta  $H_0$  y se rechaza  $H_1$ , por lo que se puede aceptar la afirmación del equipo directivo. La respuesta es distinta. Con un nivel de confianza del 99 %, se acepta  $H_1$ , y se rechaza  $H_0$ , por lo que la afirmación del equipo directivo es errónea.*

### *Intervalo de confianza*

La cuestión 2 de la Prueba-B trata del intervalo de confianza para una proporción. Su enunciado es como sigue:

2. En una muestra de 600 personas de una ciudad se observa que 30 son inmigrantes:
- a) Determinar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para el porcentaje de inmigrantes en la ciudad.
  - b) Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se usa un nivel de significación del 1%?

40 alumnos eligen esta cuestión de los que 4 no eligen la cuestión 3. Tenemos pues que hay 36 alumnos (72%) que han elegido las dos cuestiones de inferencia estadística.

El apartado a) es resuelto bien por 21 alumnos (52%-42%), y sólo 10 alumnos han resuelto bien los dos apartados (25%-20%). El éxito aquí es ligeramente superior al obtenido en la cuestión 3.

Al abordar el tamaño de la muestra, apartado b), 4 alumnos fallan al en la fórmula y 7 alumnos fallan en los cálculos.

Si cruzamos los datos con los de la cuestión 3 observamos los siguientes comportamientos, de los 21 alumnos que determinan correctamente el intervalo de confianza:

7 alumnos resuelven correctamente también los dos apartados del test de hipótesis (18%-14%). De estos, 6 también calculan bien el apartado b) relativo al tamaño de la muestra, fallando el restante alumno en la realización de los cálculos (no en la fórmula).

7 alumnos fallan en el test de hipótesis al calcular una región bilateral.

### *Conclusión*

Como hemos señalado sólo 7 alumnos (18%-14%) realizan los tres pasos del contraste de hipótesis correctamente y determinan correctamente el intervalo de confianza.

Sólo 6 alumnos (15%-12%) concluyen correctamente las dos cuestiones de estadística.

21 alumnos dan una respuesta coherente, con su planteamiento y cálculos, dentro de la cuestión del test de hipótesis, lo que supone un porcentaje muy próximo al 50% de los que eligen esta cuestión. El resto comenten incoherencias entre el planteamiento y los cálculos (10 alumnos) o cometen otros fallos que no precisamos aquí por falta de un análisis más detallado.

Si nos fijamos en los alumnos que han realizado bien el intervalo de confianza (21) observamos que un tercio de ellos (7) cometen el error de determinar una región bilateral en el test de hipótesis, no utilizando ninguno de ellos la media muestral como valor central del intervalo. Pensamos pues que el error puede ser debido a que todo intervalo de confianza es central y esto sólo ocurre en las regiones cuando se trata de intervalos bilaterales.

Esperamos ampliar la muestra y realizar un análisis más fino en el futuro.