La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal

Juan Antonio García Cruz

Números, 38 (1999), 3-20.

La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal[1]

Juan Antonio García Cruz

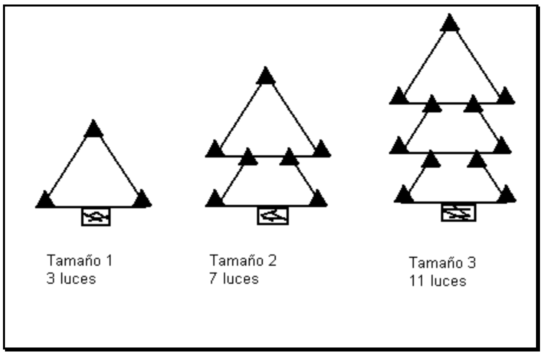
Abstract: This paper deals with the process of generalization as it is developed by secondary education students through a special kind of tasks: the linear generalizing problems. A new category of students' responses as well as actions, invariants and levels of generalization are reported.

Resumen: Este artículo trata sobre el proceso de generalización tal y como es desarrollado por alumnos de secundaria al realizar un tipo particular de tareas: los problemas de generalización lineal. Se aporta una nueva categorización de las respuestas así como acciones, invariantes y niveles de generalización.

Introducción

Una pregunta que siempre me ha atraído es ¿cómo construimos el conocimiento? Me refiero al conocimiento no memorístico sino aquel conocimiento que manifestamos con clara comprensión de lo que expresamos. Con ese centro de interés comencé allá por el año 1991 una investigación, que finalmente concluyó en una tesis doctoral. Elegí un tema propio de la secundaria: las sucesiones aritméticas. Una vez elegido el tema, lo siguiente fue preguntarme qué había escrito sobre el tema en la literatura de investigación. El primer trabajo que cayó en mis manos fue el de Stacey (Stacey, 1989). Tal trabajo trata de un tipo particular de sucesiones aritméticas, aquellas cuyo término general es de la forma $f(n) = an + b$, con a y b números enteros tales que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a > 0$ y $a + b > 0$ (en otras palabras, b puede ser un entero negativo). Este hecho excluye a las progresiones aritméticas de la forma $f(n)=an$. Tales problemas se conocen en la literatura didáctica con la denominación de *problemas de generalización lineal*.

El formato de presentación, aunque puede variar, tiene por lo general dos partes y es del siguiente tipo:



(Figura 1)

Primera parte: Mediante dibujos ilustrativos se describen los primeros términos (n = 1, 2, 3,...) de una sucesión de objetos que están compuestos de *f(n)* elementos bien diferenciados. De esta forma se conocen los primeros términos *f(1), f(2), f(3)...* de la sucesión numérica.

Segunda parte: Se propone una tarea que consta de tres tipos de cuestiones:

a) *Cuestiones introductorias:* Se pide el número de elementos que corresponden a objetos de tamaño cuatro o cinco: *f(4)* ó *f(5)*.

b) *Cuestión de generalización próxima:* Se solicita el número de elementos que corresponden a un objeto de tamaño tal que el alumno pueda calcularlo mediante un procedimiento de recuento directo, como *f(10)*.

c) *Cuestión de generalización lejana:* Se solicita el número de elementos que corresponden a un objeto de un tamaño tal que el cálculo es difícil o resulta complejo por un procedimiento de recuento directo, como *f(20)* ó *f(100)*.

El término *generalización próxima* hace referencia a una cuestión que puede ser resuelta mediante un recuento directo sobre un dibujo construido al efecto o mediante la extensión de la sucesión numérica correspondiente; el término *generalización lejana*, hace referencia a una cuestión que no se puede abordar o es difícil de hacer por los procedimientos paso a paso descritos para la *generalización próxima*, y requiere la búsqueda de una expresión o fórmula general.

[1] Este artículo esta basado en la memoria presentada por el autor, y dirigida por el Dr. Antonio Martinón Cejas para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna el 20 de Junio de 1998.

A continuación resumo los hallazgos, más importantes, del trabajo de Stacey con alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 13 años.

1) Clasifica los métodos empleados por los alumnos en cuatro categorías:

Recuento: Contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.

Diferencia: Se asume de forma implícita que la adición repetida implica que $f(n) = an$.

Whole-object : Se asume implícitamente que $f(mn) = mf(n)$.

Lineal: Utilización de una pauta lineal, es decir, se reconoce que tanto las operaciones de suma y multiplicación están involucradas y que, además importa el orden en que se realizan las operaciones. Se asume implícitamente que $f(n) = an + b$, $b \neq 0$.

Además, señala que los alumnos más experimentados mostraron, en su explicación escrita, una cierta influencia del dibujo en el desarrollo del método empleado.

2) Además, Stacey estudió la *consistencia*, definiéndola como la persistencia del método utilizado en una cuestión al pasar a otra, tanto en un mismo problema como entre problemas.

Su conclusión es que los alumnos son inconsistentes en el uso de los métodos, al encontrar un alto porcentaje de alumnos que utilizan más de un método tanto en un mismo problema como en dos problemas.

Una lectura del trabajo de Stacey me llevó a formularme algunas preguntas. ¿Qué papel juega el dibujo en este tipo de problemas? ¿Se comportaran nuestros alumnos igual que los del trabajo de Stacey? ¿Qué ocurrirá si aplico la prueba a alumnos de mayor edad, incluso alumnos que han sido instruidos en sucesiones aritméticas, pero no con este formato de problemas? Esto ocurrió al final del curso 92. Para el curso 92-93 ya tenía adaptada la prueba, la misma que Stacey, y elegidos los centros y alumnos a los que administrarla.

Primer estudio (estudio exploratorio)

La población final, de este primer estudio, consistió en 373 alumnos de todos los niveles educativos desde 8º EGB hasta COU y de cuatro centros diferentes. Al final incluí a dos curso de 4º ESO.

El análisis de los datos proporcionó nuevas categorías para la clasificación de las respuestas escritas. Cada respuesta se clasificó atendiendo a los tres elementos siguientes: *esquema conceptual subyacente*, *estructura sintáctica de los cálculos* y *explicación de los mismos*. En la explicación, dada por los alumnos, me interesó si se referían a los dibujos presentes en la tarea, a la sucesión numérica o a ambos. Este primer análisis sugirió que las respuestas de los alumnos se podrían clasificar atendiendo a tres esquemas conceptuales: *Recuentos directos*, *Proporcionalidad directa* y *Lineal*. Además cada uno de ellos, atendiendo a la estructura sintáctica de los cálculos, se subdivide en diferentes modalidades que paso a exponer, acompañadas de ejemplos ilustrativos.

Recuentos directos (R):

- Rd: Recuento sobre un dibujo.
- Rs: Extensión de la sucesión hasta el término requerido por suma repetida de la diferencia constante.

Proporcionalidad directa (W):

- W1: Se caracteriza por el uso explícito de la diferencia constante *a*, y se asume erróneamente, que el proceso de iteración (sumar repetidamente la diferencia constante) implica que $f(n) = an$.

Problema de la escalera — Alumno 276 (4º ESO)

<u>E4:</u> ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?
<u>Respuesta</u>: *Necesitaría 60 palillos, pues si cada peldaño son 3, 3 ·20 son 60 palillos.*

- W2: Se asume de forma implícita que $f(mn) = mf(n)$. No se hace uso explícito de la diferencia constante.

Problema de la escalera — Alumno 296 (4ºESO)

<u>E4</u> :¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
<u>Respuesta:</u> *68 palillos, cogí la suma de 5 peldaños que son 17 palillos y 17 lo multiplique por 4 y me da el resultado de los 20 peldaños; lo multiplique por 4 porque 4 veces 17 da el resultado de 5 peldaños que sería 20 peldaños.*

- W3: Se utiliza el esquema típico de la *regla de tres*. Tampoco se explicita el reconocimiento del papel que juega la diferencia constante.

Problema de la escalera Alumno 49 (1ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *Si para 4 — 14*
20 — x; 4x= 14 · 20, 4x=280, x=280/4, x=70
Se utilizan 70 palillos.

Conviene señalar que existe una singularidad en la primera categoría de respuesta (W1) que la hace esencialmente diferente de las otras dos categorías (W2 y W3). En la primera se utiliza la diferencia constante, mientras que en las otras dos no. La diferencia entre la segunda categoría (W2) y la tercera (W3) es que en la primera se constata, en la explicación dada, la evidencia del empleo del razonamiento de tipo proporcional, aunque incorrecto en esta cuestión, mientras que al emplear la regla de tres el alumno puede estar utilizando un algoritmo aprendido de memoria. En el primer caso (W2) el alumno ha podido conjeturar que una escalera mayor, digamos de tamaño 100, tendrá un número de palillos cinco veces mayor al número de palillos de una escalera de tamaño 20; es decir, sí $f(20) = 60$, entonces $f(100) = 5\times62 = 310$. Por otra parte, es conocida la predisposición que tienen algunos alumnos a utilizar la regla de tres, en aquellas cuestiones en que se les da tres datos y se les pide el cálculo de un cuarto, ya que no se detienen a analizar la situación dada y aplican tal algoritmo sea o no directamente proporcional la relación entre las variables.

Lineal (L):

- L1: La respuesta dada por los alumnos corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$, con $b\neq 0$ y a igual a la diferencia constante. Se trata de una respuesta de tipo funcional.

Problema de la escalera Alumno 51 (1ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *3×20=60+2. 62 palillos.*

Problema del árbol de Navidad Alumno 38 (1ºBUP)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *(20·4)-1=80-1=79. 79 luces.*

- L2: Se caracteriza por el uso explícito de expresiones para el cálculo que se corresponden con la estructura simbólica $f(n) = d(n-m) + f(m),\ m < n,\ m \geq 1$. Se trata de una respuesta de tipo funcional-recursivo.

Problema de la escalera Alumno 59 (1ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *62 palillos. 2 corresponden 8. 18×3=54; 54+8=62.*

A continuación damos un ejemplo de una modalidad dentro de la categoría anterior y que denominamos L2a. Corresponde al uso explícito que hacen los alumnos, de la expresión habitual para el cálculo del término general de las progresiones aritméticas $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Problema de la escalera Alumno 350 (2ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: $a_{20} = a_1 + d(n-1)$. $a_{20} = 5 + 3\times19$. $a_{20} = 5+57$. $a_{20} = 62$.

- L3: Se caracteriza porque en las expresiones para el cálculo no aparece explícitamente la diferencia constante.

Problema de la escalera Alumno 48 (1ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *21+21=42+20=62.*

Problema del árbol de Navidad Alumno195(COU)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta :
1 —3; 1×3 = 3 + 0 = 3
2 —7; 2×3 = 6 + 1 = 7
3 —11; 3×3 = 9 + 2 = 11
4 —15; 4×3 = 12 + 3 = 15
⇒20 — 79; 20(tamaño)×3(luces)=60+19=79
Multiplicas el tamaño ×3 y le sumas el tamaño anterior 19.

Esta clasificación amplía la dada por Stacey (1989), pues en aquella clasificación no se distinguía entre las diferentes respuestas de tipo lineal. Aquí, además, se precisan tres esquemas conceptuales que se subdividen en categorías diferenciadas de respuestas.

La tabla 1 muestra el porcentaje de respuestas en cada categoría dentro de cada esquema conceptual (R, W y L) así como las no clasificadas (n.c.), dadas por los alumnos en las cuestiones de generalización próxima y lejana en los dos problemas (la escalera y del árbol de Navidad).

Tabla 1
Esquema conceptual y categoría de respuesta por nivel (en%)

Nivel	n.c.	Rs	Rd	R	w1	w2	w3	W	L1	L2	L2a	L3	L
8ºEGB	**25**	0	7	**7**	33	6	7	**46**	9	10	0	3	**22**
1ºBUP	**13**	3	1	**4**	13	6	16	**35**	19	22	0	6	**47**
4ºESO	**22**	2	4	**6**	13	9	1	**23**	28	13	0	8	**49**
2ºBUP	**10**	0	0	**0**	9	3	26	**38**	4	8	39	1	**52**
3ºBUP	**12**	2	2	**4**	2	4	25	**31**	18	25	4	6	**53**
COU	**7**	0	1	**1**	2	1	21	**25**	22	33	1	11	**67**
Total	**15**	1	3	**4**	12	5	15	**32**	18	18	6	6	**48**

El porcentaje de alumnos que no contesta o contesta inclasificablemente (n.c.), es menor en los niveles superiores de la secundaria. Ocurre lo mismo con las respuestas correspondientes al esquema conceptual de proporcionalidad directa (W). Sin embargo, llama la atención el hecho de que en los niveles superiores, se obtenga el mayor porcentaje de empleo de la *regla de tres* (W3), siendo máximo en 2ºBUP. Por otro lado, la categoría W1 obtiene los mayores porcentajes en los niveles educativos inferiores. Las respuestas de tipo lineal aumentan según edad y nivel educativo. En 2º BUP casi todas las respuestas lineales son de la categoría L2a (fórmulas para las *progresiones aritméticas*), lo que indica que tales alumnos, que habían sido instruidos en tal tema dos meses antes de pasar la prueba, asimilan las situaciones a tal esquema conceptual. Sin embargo, los alumnos de 3ºBUP y COU no muestran explícitamente el uso de tal esquema conceptual, lo cual es una prueba de lo débilmente que ha sido construido.

Por motivos de espacio no detallo los hallazgos respecto de la consistencia de los alumnos, señalo sólo que los alumnos son consistentes en cada problema siendo la consistencia menor al cambiar de un problema a otro.

Marco teórico

Una vez acabado ese primer estudio, que como puede imaginar el lector llevó mucho tiempo de análisis y clasificación de las respuestas escritas, surgieron algunas cuestiones más precisas. En este tipo de problemas, ¿qué es lo que se generaliza? ¿Cuándo se puede decir que un alumno ha realizado una generalización? ¿Qué papel juega el dibujo y la sucesión numérica en la generalización? Todo lo que, hasta ese momento, tenía era sobre la solución escrita y vagamente podía conjeturar algo sobre qué había pasado por la mente de los alumnos al resolver los problemas. Esto me llevó a otra pregunta mucho más importante y relacionada con todas las anteriores: ¿En qué consiste el proceso de generalización en este tipo de problemas?

Además, al mismo tiempo, aparecieron algunos nuevos trabajos en la literatura de investigación relacionados con este tema. En el trabajo de Orton y Orton (1994), realizado con alumnos de 9 a 13 años de edad, se observa que "la generalización tiene lugar a más de un nivel: algunos sujetos son capaces de utilizar métodos generalizables para calcular los términos de una sucesión particular, pero sus habilidades no les permiten extender tales métodos a las siguientes sucesiones. Sin embargo, otros sujetos sí muestran tal habilidad. Con respecto a la relación entre n y f(n), algunos sujetos han mostrado un nivel de generalización que sólo les permite aportar soluciones numéricas, otros son capaces de resumir relaciones utilizando palabras y pocos fueron capaces de convertirlas en formas algebraicas reconocibles". Respecto de los obstáculos encontrados en este primer trabajo, se señala entre otros, que “la fijación en enfoques recursivos puede obstaculizar seriamente el progreso hacia una regla universal” así como el uso amplio, por los sujetos, de métodos inapropiados (proporcionalidad directa). Tales obstáculos fueron señalados ya en el trabajo de Stacey.

En nuestro país, Castro (1995) utilizó las configuraciones puntuales[2], como sistema de representación de los números naturales y como medio adecuado para visualizar y analizar secuencias. A través de una secuencia de tareas estructuradas, que contienen pautas lineales y cuadráticas, y combinando otros dos sistemas de representación, estudió la potencia de tales configuraciones para expresar relaciones y propiedades numéricas descubiertas por los alumnos (13 a 14 años). Se concluye que tal sistema gráfico-intuitivo es ampliamente utilizado por los alumnos, aunque se detectan ciertos problemas en su uso. Por ejemplo, “al representar varios términos de una secuencia mediante configuración puntual se pueden analizar sus términos mediante diferentes desarrollos aritméticos y, por tanto, obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes del término general de la sucesión". Este último resultado hace clara referencia al dibujo como fuente para la obtención del término general de una sucesión.

Por último otros dos trabajos Redden (1994) y Taplin (1995) clasifican las respuestas de los alumnos, en términos similares a los de Stacey y señalan vagamente la posibilidad de que, en muchas de las respuestas, estuvieran presentes ciertas referencias al dibujo que acompaña a los problemas.

Aunque los trabajos citados aportaban metodologías y datos de la investigación interesantes y valiosos, seguían a mi juicio sin responder a las preguntas que me había formulado sobre el proceso de generalización.

La generalización ha sido siempre un tema de interés tanto en la psicología experimental como en la didáctica de las matemáticas. Necesitaba documentarme sobre el tema y busqué en la fuente clásica que constituye los trabajos de Piaget (1987, 1990) Beth y Piaget (1980), así como en trabajos más recientes como son los de Dörfler (1991) y Dubinsky y Lewin (1986). Del estudio de tales fuentes teóricas presento una breve síntesis.

La generalización tiene como punto de partida, génesis, las acciones que el sujeto introduce sobre los elementos de la situación a estudio. Para Piaget y Dörfler una acción puede ser tanto material, física, como mental. Para Piaget, el proceso mediante el cuál tales *acciones* se transforman en una entidad conceptual abstracta, se denomina *abstracción reflexiva*. Para Dörfler tal proceso concluye con el establecimiento de un *invariante*, con dos cualidades bien diferenciadas una *intensional* (estructura genérica abstraída) y otra *extensional* (rango de aplicabilidad del objeto mental construido). Por otro lado, en la construcción de todo nuevo conocimiento se utilizan esquemas ya construidos y cuya disposición particular, es decir, la forma en que tales esquemas influyen en la construcción del nuevo conocimiento ha sido denominado por Dubinsky y Lewin como *esquema de descomposición genética* del nuevo concepto.

Con estas nuevas armas teóricas, me propuse abordar el segundo estudio. Como objetivos me propuse determinar las acciones, los invariantes y qué generalizan los alumnos.

Segundo estudio. Entrevistas.

Este segundo estudio se localizó en el I.E.S Domingo Pérez Minik, durante el primer trimestre del curso 96-97. Debido a los objetivos, profundizar sobre el proceso de generalización, la metodología a utilizar fue interpretativa y se utilizo en concordancia como instrumento fundamental la realización, grabación, trascripción e interpretación del trabajo de los alumnos mediante entrevistas. Para poder seleccionar a los alumnos se les pasó a todos los de 4ºESO (168 alumnos) el problema del árbol de Navidad, que tan variadas respuestas habían proporcionado en el primer estudio, en dos formatos diferenciados. Para 132 alumnos el formato fue el usual, es decir con dibujo, mientras que para 36 alumnos el formato fue sin dibujo. Durante las entrevistas los alumnos tuvieron que explicar ciertas cuestiones relativas al problema de la prueba escrita y además realizaron a continuación un nuevo problema de generalización lineal denominado hexágonos con cerillas (Ver el Apéndice).

En primer lugar, este estudio aportó una definición precisa de ***estrategia de solución***. Una estrategia de solución esta formada por la combinación de *acciones*, *esquema de la acción* e *invariante* establecido en el curso de la resolución.

[2] Un tipo de problemas relacionado con los problemas de generalización lineal pero, que se podrían considerar como intermedio entre el problema en abstracto (sólo sucesión numérica sin más) y el problema concreto que se plantea en uno de generalización lineal.

Hemos detectado tres modalidades:

- ***Visual***: el dibujo juega un papel esencial en el establecimiento del invariante, al ser el medio donde se desarrollan las acciones.
- ***Numérica***: la sucesión numérica juega un papel esencial en el establecimiento del invariante.
- ***Mixta***: las acciones se desarrollan en la sucesión numérica y el dibujo es el medio para comprobar la validez de los cálculos realizados.

En otro trabajo, publicado recientemente (García Cruz, J. A. y Martinón, A. 1998d) se hace un análisis mucho más detallado de las acciones, del carácter dinámico o estático de las mismas así como de los esquemas de la acción. También se informa ampliamente sobre la estrategia visual de solución.

Acciones. Realizar el dibujo completo del tamaño requerido y contar los elementos, es una acción utilizada en las cuestiones introductorias, *f(4)* y *f(5),* pero no conduce obviamente a una estrategia generalizable. Se suele utilizar como medio para comprobar los cálculos, como veremos más adelante.
Hemos detectado seis acciones que sí llevan a estrategias generalizables. Una sobre el dibujo (A1) y cinco (A2 a A7) sobre los datos numéricos.

- A1: Es una acción mental que involucra una imagen del dibujo dado en el problema, y que consiste en construir mentalmente, o imaginar mediante un esbozo incompleto de la figura del objeto del tamaño requerido, un dibujo de un cierto tamaño a partir del primer tamaño o de un tamaño dado, añadiéndole partes semejantes entre sí, cada una formada por un número constante de elementos. El número constante de elementos puede coincidir con la diferencia constante o no. Aquí un aspecto esencial es que no se realiza ningún recuento directo sobre el dibujo realizado.

- A2: Consiste en contemplar la sucesión de términos numéricos a partir de uno ya calculado, o dado por el problema, y contar a partir de él el número de diferencias constantes que deben ser añadidas.

- A3: Consiste en considerar que un tamaño buscado tiene el doble de elementos que el tamaño mitad correspondiente.

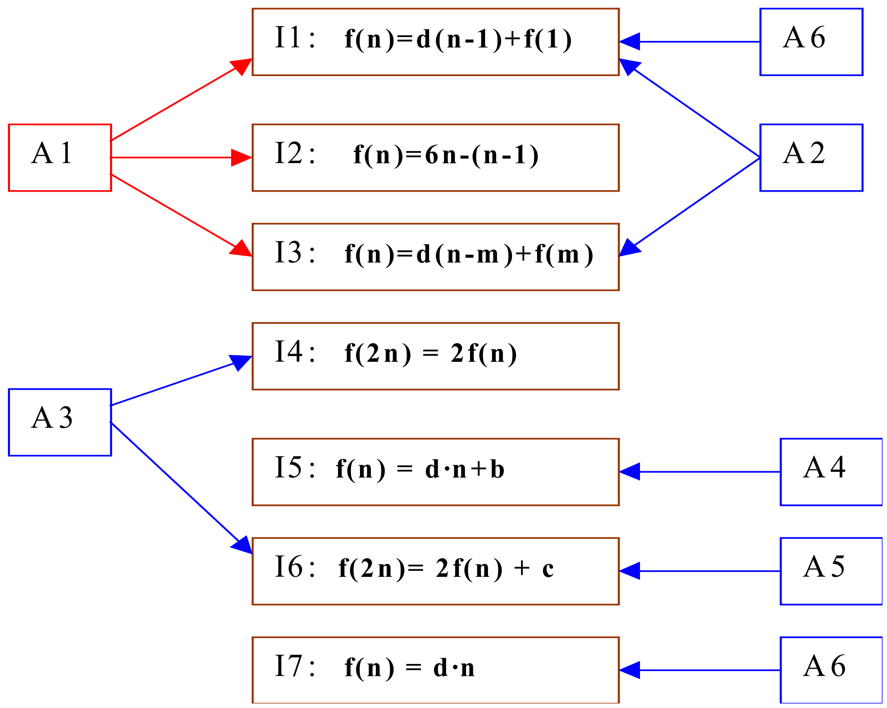
- A4: Realizada sobre los datos numéricos y consistente en la búsqueda de una relación de tipo funcional entre el tamaño del objeto *n* y el número de elementos del mismo *f(n).*

- A5: Es una acción sobre los datos numéricos y consiste en actuar sobre los números mediante el algoritmo de la *regla de tres*.

- A6: Es una acción realizada sobre los datos numéricos del problema y consiste en aplicar la expresión simbólica para calcular un término cualquiera de una progresión aritmética.

- A7: Consistente en extender la sucesión numérica mediante suma iterada de la diferencia constante *d*. Esta acción es la manifestación del carácter iterativo de la pauta numérica. Aunque es una acción puramente rutinaria, a través de ella se resalta la diferencia constante que separa a cada término del anterior, hecho que no queda siempre claro en la acción rutinaria de realizar un dibujo del objeto y contar los elementos que lo componen.

Invariantes. Las entrevistas permiten describir siete invariantes establecidos a partir de las acciones, sin embargo, la relación entre invariantes y acciones no es unívoca como se pone de manifiesto en la figura 2. Además, no todos los invariantes son correctos. Las expresiones simbólicas para los invariantes que se muestran en la figura 2, se dan como ejemplo genérico de las respuestas aritméticas de los alumnos. Estos en la mayoría de los casos no proporcionaron una respuesta de tipo algebraico, entre otras razones porque tal expresión algebraica no se les pedía.



(Figura 2)

Respecto de qué generalizan los alumnos, encontramos diferentes tipos generalizaciones que nos llevan a formular el *esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal* a través de tres niveles bien diferenciados. Cada nivel caracteriza lo qué se generaliza en cada momento de la resolución de uno o dos problemas del mismo tipo. Estos niveles nos informan con detalle del *proceso de generalización*.

- ***Nivel 1***. El alumno reconoce y utiliza el carácter *iterativo* y *recursivo* de la pauta lineal. El alumno se centra en el rasgo perceptual más obvio de la pauta lineal: *sumar la diferencia constante*. Tales comportamientos no son generalizables, corresponden a recuentos directos, pero son importantes pues resaltan la diferencia constante de la pauta lineal. También son útiles, en otro nivel, como procedimientos de comprobación de la validez de los cálculos efectuados. Con respecto a la sucesión numérica, se pueden dar dos comportamientos bien diferenciados. El primero consiste en extender la sucesión numérica desde el primer término hasta alcanzar el término requerido (suma iterada, sumar todo: por ejemplo, $f(10) = f(1) + d + d + \ldots$), el segundo consiste en darse cuenta que se puede alcanzar el término requerido sin necesidad de comenzar cada vez desde el primer término, basta con utilizar el valor numérico para un término dado o previamente calculado (proceso recursivo, sumar desde: por ejemplo, $f(10) = f(9) + d$).
- ***Nivel 2.*** El alumno ha establecido una *generalización local*. Tal generalización se manifiesta al aplicar la misma *regla de cálculo* a las cuestiones de generalización próxima y lejana, dentro de un mismo problema. Es decir, ha aplicado la misma acción y ha establecido el mismo invariante en todas y cada una de las cuestiones propuestas (puede incluso ser en las introductorias, primeros términos). No consideramos aquí que sea necesario haber expresado algebraicamente los invariantes establecidos ni el cálculo específico llevado a cabo en cada cuestión. Luego en este nivel lo que el alumno ha generalizado es la *regla específica de cálculo* para cada cuestión en el mismo problema, la cual queda fijada por el *invariante* establecido.
- ***Nivel 3.*** El comportamiento del alumno es consistente en secuencias de problemas del mismo tipo. En este nivel, el alumno aplica la misma *estrategia de solución* en dos o más problemas, del mismo tipo, dados en secuencia. Lo que a este nivel se generaliza es la estrategia empleada para resolver una tarea concreta, es decir, la forma general de proceder que consiste en, las acciones realizadas, esquemas de las acciones, y las relaciones conectivas entre los elementos de las acciones que conducen al invariante establecido.

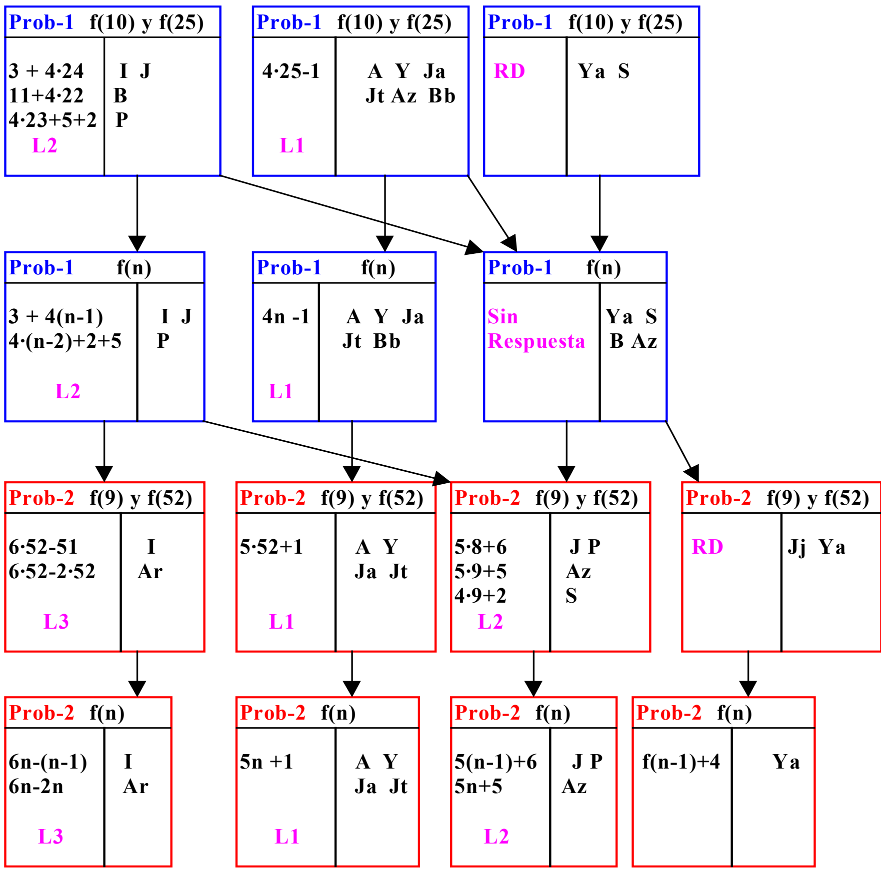
Por último, a finales del primer trimestre del curso 96-97, realicé una experiencia de aula con alumnos de 4ºESO, que constituyó el tercer estudio de la investigación, y cuyos principales resultados no reproducimos aquí y remitimos al lector interesado a las referencias correspondientes (García Cruz, J.A y Martinón, A 1998a, 1998c).

Seis meses después de haber realizado la experiencia de aula y el último día del curso 96-97, pasé a los alumnos una prueba escrita que consistió en dos problemas, el árbol de Navidad y hexágonos con cerillas (Prob-1 y Prob-2 de la figura 3), dados en ese orden y ambos no tratados en clase.

Para visualizar las respuestas de los alumnos a las cuestiones dentro de cada problema así como a la secuencia de los dos problemas, desarrollamos un instrumento visual, que denominamos GVT(grafo para visualizar transiciones). El GVT (figura 3) muestra la forma en que respondieron los alumnos a las cuestiones dadas en cada problema.

La clave para su lectura es la siguiente:

Problema y cuestiones	
Respuestas dadas por los alumnos	Alumnos



(Figura 3)

Del GVT podemos extraer las siguientes conclusiones.

i) Ya no hay respuestas del tipo W (proporcionalidad directa).
ii) Hay 6 alumnos: A,Y,Ja,Jt,P, J que generalizan la estrategia (nivel 3).
iii) Hay 5 alumnos: I,B, Ar, Az, Bb que generalizan la regla de cálculo (nivel 2).
iv) Hay 3 alumnos que permanecen en el nivel 1.
v) Es notable la persistencia en el tiempo, seis meses después, del conocimiento adquirido.

A modo de conclusión

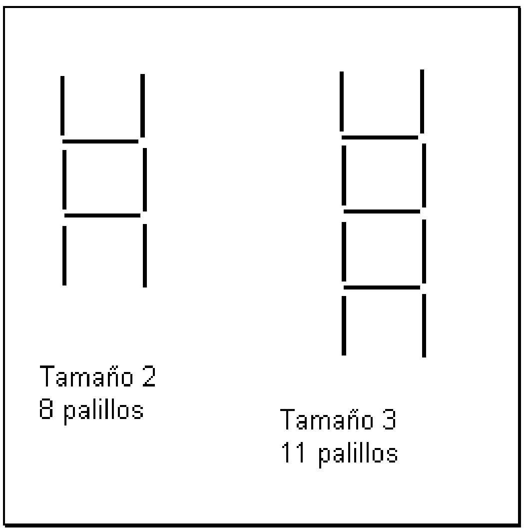
Si se les permite a los alumnos resolver un problema, sin antes haberles dicho o explicado un modo determinado de solución, se puede obtener como en este caso un variado número de respuestas. El contexto del problema influye también en la variedad de respuestas, pues si el contexto incluye texto, dibujos o diagramas además de números, permite a los alumnos elegir el medio más asequible a su forma de enfrentarse a las situaciones matemáticas. Algunas de las respuestas serán correctas y otras no. Las respuestas correctas e incorrectas nos indican la forma particular de entender el problema de cada alumno. Si conocemos los tipos de respuestas que los alumnos darán a una tarea en particular, disponemos de un valioso bagaje a emplear luego en clase para poder ayudar a los alumnos a desarrollar una comprensión mucho más profunda de los contenidos que pretendemos enseñar. Utilizar la resolución de problemas para introducir y desarrollar nuevos conceptos, apoyándonos en el conocimiento previo de los alumnos es una de las actividades más gratificantes, tanto para alumnos como para profesores, de la enseñanza de las matemáticas.

Apéndice

Dibujos que acompañaban a los diferentes problemas citados en el texto.

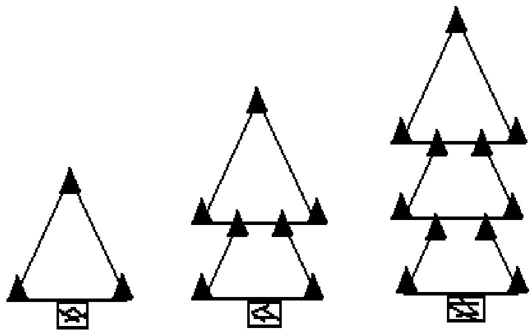
Estudio primero

Problema de la escalera



Estudios primero, segundo y prueba final

Problema del árbol de Navidad

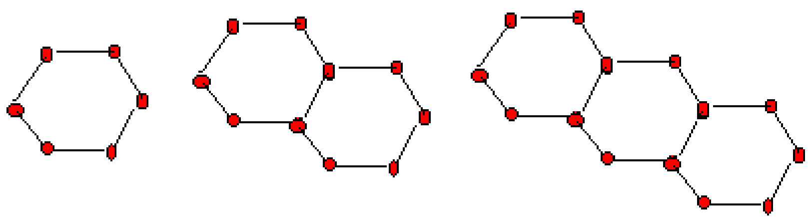


Tamaño 1
3 luces

Tamaño 2
7 luces

Tamaño 3
11 luces

Estudio segundo y prueba final



Tamaño 1
6 palillos

Tamaño 2
11 palillos

Tamaño 3
16 palillos

Hexágonos con cerillas

Bibliografía

Beth, E.W. y Piaget, J.: 1980. *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.* Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona. [Épistémologie Mathématique et Psychologie. Essais sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle. Presses Universitaires de France, París. 1961]

Castro, E: 1995. *Exploración de Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares del Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Editorial Comares. Granada.

Dörfler, W.: 1991. 'Forms and means of generalization in mathematics', en A. Bishop *et al* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, pp. 63-85. Kluwer. Holand.

Dubinsky, E. y Lewin, P.: 1986. Reflective Abstraction and Mathematics Education: the genetic decomposition of induction and compactness, *The Journal of Mathematical Behavior*, **5**, 55-92.

García Cruz, J.A.: 1998. *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de La Laguna.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1997a. 'Graph for visualizing transitions (GVT) in sequences of problems with many questions', en E. Pehkonen (editor) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 279. University of Helsinki. Finland.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1997b. 'Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems', en E. Pehkonen (editor) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 289-296. Univerity of Helsinki. Finland.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1998a. 'Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa'. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, **16**, pp. 85-100.Grao. Barcelona.

García Cruz, J.A. y Martinón, A. (1998b): "Levels of generalization in linear patterns", en A. Olivier y K. Newstead (editores) *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, pp. 329-336. University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

García Cruz, J. A. y Martinón, A.: 1998c. 'A teaching experience with linear pattern and sociomathematical norms', en P. Abrantes, J. Porfirio y M. Baía (editores), *The interactions in the mathematics classroom - Proceedings of CIEAEM-49*, pp. 262–269. Escola Superior de Educação de Setúbal. Portugal.

García Cruz, J. A. y Martinón, A.: 1998d. 'Estrategia visual en la generalización de pautas lineales'. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*. Vol 17, nº 1, pp. 31-43.

Orton, A. y Orton, J.: 1994. 'Students' perception and use of pattern and generalization', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 407-414. University of Lisbon. Portugal.

Piaget, J.: 1987. *Introducción a la Epistemología Genética: El pensamiento Matemático*. Editorial Paidós. Mexico.

Piaget, J.: 1990. *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid. [L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement (Études d'Épistemologie génétique, XXXIII). Presses Universitaires de France. 1975] (Traducción de Eduardo Bustos).

Redden, E.: 1994. 'Alternative pathways in the transition form arithmetic thinking to algebraic thinking', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 89-96. University of Lisbon. Portugal.

Taplin, M.: 1995. 'Spatial patterning: a pilot study of pattern formation and generalization', en L. Meira y D. Carraher (eds), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 42-49. Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Brasil.

Stacey, K.: 1989. 'Finding and using patterns in linear generalising problems', *Educational Studies in Mathematics*, **20**, pp. 147-164.

Juan Antonio García Cruz
Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna
I.E.S. Domingo Pérez Minik (La Laguna)
jagcruz@ull.es